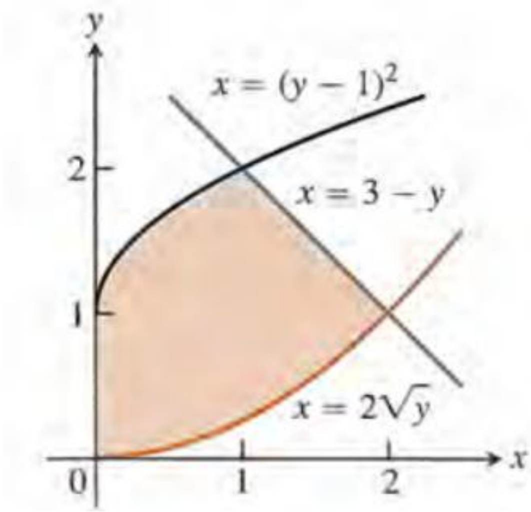
TALLER No. 2

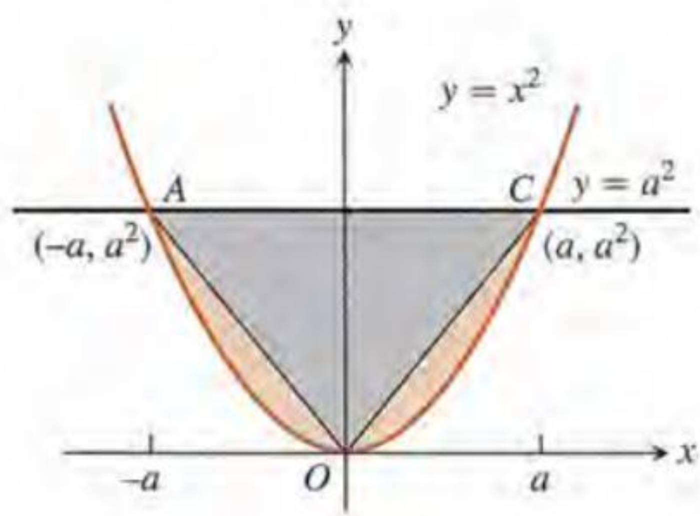
Desarrollar los siguientes problemas:

ÁREAS ENTRE CURVAS

Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $x = (y - 1)^2$ y arriba a la derecha por la recta $x = 3 - y$.

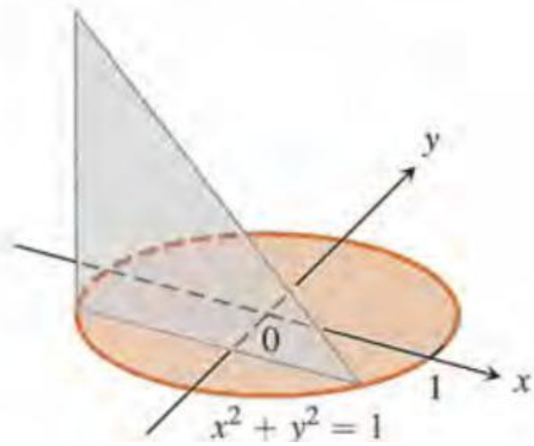


La siguiente figura muestra el triángulo AOC inscrito en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y por la recta $y = a^2$. Determine el límite de la razón del área del triángulo al área de la región parabólica cuando a tiende a cero.

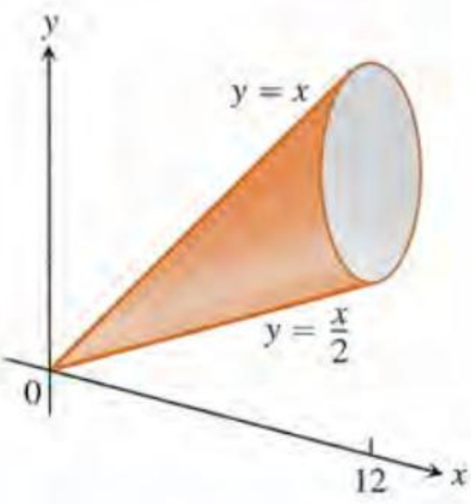


VOLUMENES POR SECCIONES TRANSVERSALES

La base del sólido es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Las secciones transversales son triángulos rectángulos isósceles determinados por planos perpendiculares al eje y entre $y = -1$ y $y = 1$, con uno de los catetos en el disco.



Principio de Cavalieri Un sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 12$. Las secciones transversales son discos circulares determinados por planos perpendiculares al eje x, sus diámetros van desde la recta $y = x/2$ a la recta $y = x$, como se ilustra en la siguiente figura. Explique por qué el sólido tiene el mismo volumen que el de un cono circular recto con base de radio 3 y altura 12.



VOLUMENES MÉTODO POR DISCOS

La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y = \sqrt{2}$, por abajo por la curva $y = \sec x \tan x$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = \sqrt{2}$

La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y = 2$, abajo por la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = 2$.

VOLUMENES MÉTODO DE ARANDELAS

La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la curva $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 1$, alrededor de la recta $x = -1$.

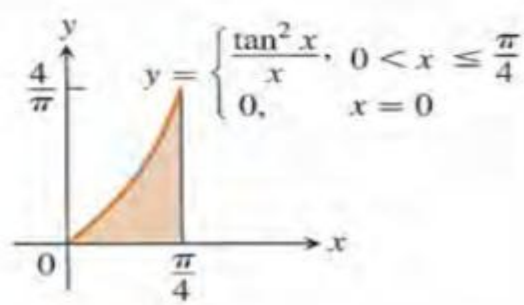
La región en el segundo cuadrante acotada por arriba por la curva $y = -x^3$, abajo por el eje x, y a la izquierda por la recta $x = -1$, alrededor de la recta $x = -2$.

VOLUMENES MÉTODO DE CASQUILLOS CILÍNDRICOS

Sea $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a. Demuestre que $xg(x) = (\tan x)^2$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

b. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje y, la región sombreada de la siguiente figura.



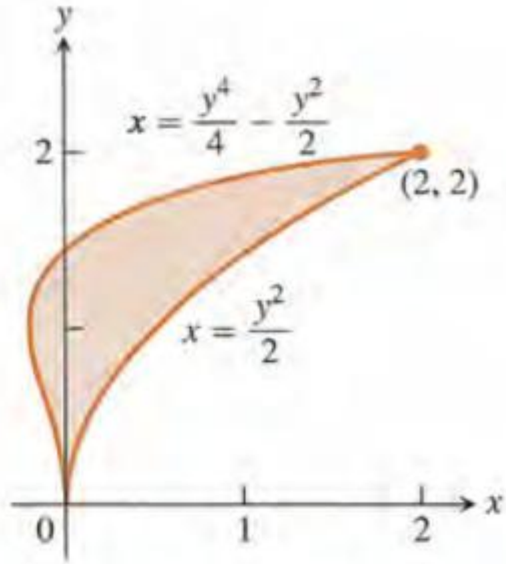
Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar las regiones acotadas por las curvas que se indican alrededor de las rectas dadas.

a. El eje x

b. La recta $y = 2$

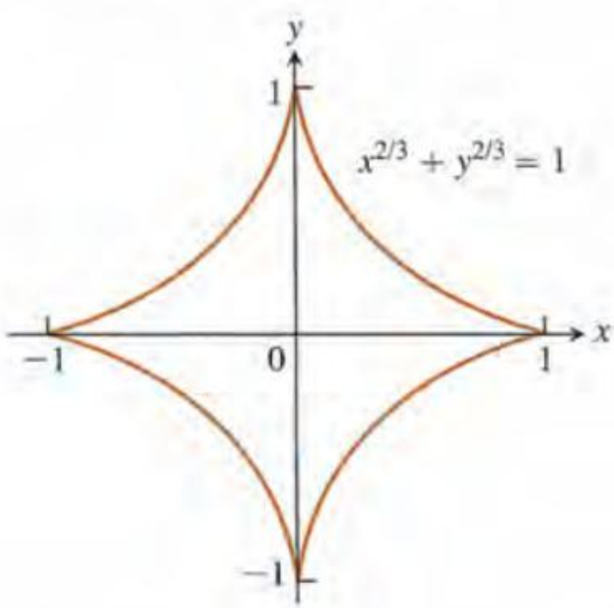
c. La recta $y = 5$

d. La recta $y = -5/8$



LONGITUD DE UNA CURVA PLANA

Longitud de una astroide La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es una familia de curvas denominada *astroides* (no "asteroides") en virtud de su apariencia de estrella (véase la figura). Determine la longitud de esta astroide particular; para ello, calcule la longitud de la mitad de la parte que está en el primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $\sqrt{2}/4 \leq x \leq 1$ y multiplique por 8.



Determine la longitud de la cada curva. Graficar las curvas.

7. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \leq x \leq 8$

8. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \leq x \leq 2$

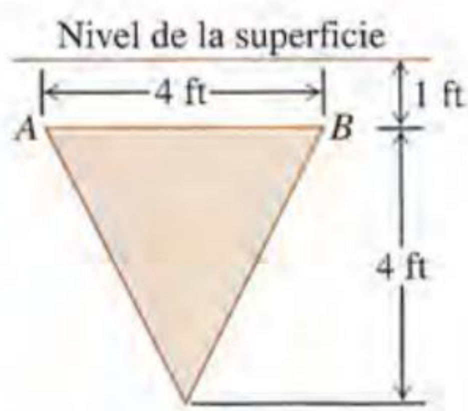
TRABAJO Y FUERZA

Ascensión del cable de un elevador Un elevador eléctrico con un motor en la parte superior tiene un cable con varios cabos que pesan 4.5 lb/ft. Cuando el carro del elevador está en el primer piso, el cable se extiende 180 ft; cuando el carro está en el piso superior, el cable se extiende 0 ft. ¿Cuánto trabajo realiza el motor para elevar sólo al cable cuando sube el carro del primero al último piso?

Placa triangular La placa en forma de triángulo isósceles que se muestra a continuación se sumerge verticalmente 1 ft por debajo de la superficie de un lago de agua dulce.

a. Determine la fuerza del fluido contra una cara de la placa.

b. ¿Cuál será la fuerza del fluido sobre un lado de la placa si el agua fuera de mar en vez de agua dulce?



CENTROIDES

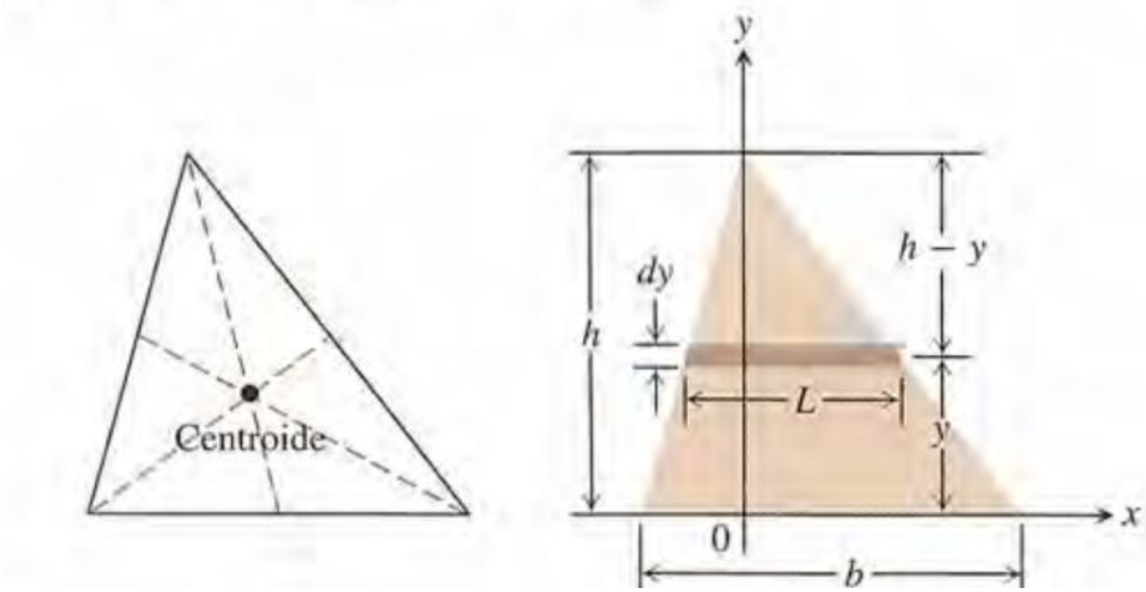
El centroide de un triángulo está en la intersección de las medianas del triángulo Recordará que el punto dentro del triángulo que está a un tercio de la distancia del punto medio de cada lado al vértice opuesto es el punto donde se intersecan las tres medianas del triángulo. Demuestre que el centroide está en la intersección de las medianas, indicando que también se encuentra a un tercio de la distancia de cada lado al vértice opuesto. Para hacerlo, realice los siguientes pasos.

i) Coloque un lado del triángulo en el eje x como en el inciso (b) de la siguiente figura. Exprese dm en términos de L y dy.

ii) Utilice triángulos semejantes para demostrar que $L = (b/h)(h - y)$. Sustituya esta expresión para L en su fórmula para dm.

iii) Demuestre que $\bar{y} = h/3$.

iv) Aplique el argumento a los otros lados.



ÁREAS DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \leq x \leq 3$, alrededor del eje x. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

Área de la superficie de un tronco $= \pi(r_1 + r_2) \times$ altura inclinada.

Determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje indicado.

$x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \leq y \leq 15/4; \quad$ eje y