

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES**

**FACULTAD DE CIENCIAS Y ADMINISTRACION
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS**

INTEGRALES IMPROPIAS

**Bernardo Acevedo Frías
Profesor Asociado**

Manizales, Junio 1994

I.S.B.N. 958-9322-16-6

Autor:
Bernardo Acevedo Frias
Matemático
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales.

Revisado por:
Profesor Fernando Pío Betancourt López, Ing. Electricista
Profesor Omar Evelio Ospina Arteaga, Matemático, Ms. Sc

Impreso por:
Centro de Publicaciones
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

Junio de 1994

INTRODUCCION

El presente texto ha sido elaborado para que sirva de apoyo didáctico en el curso de matemáticas II que se dicta en la facultad de Ciencias y Administración en la Universidad Nacional seccional Manizales.

En la primera parte se definen los diversos tipos de Integrales Impropias, sus criterios de convergencia y en la segunda parte se tratan las funciones Eulerianas Gamma y Beta, con una buena cantidad de ejemplos resueltos y propuestos para que sirvan de apoyo a comprender y clarificar los aspectos teóricos.

Bernardo Acevedo Frias
(profesor asociado)

1. INTEGRALES IMPROPIAS

En el estudio de la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ se ha

sobrentendido, hasta ahora que :

1. Los límites de integración son números finitos.
2. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$.
Si f es discontinua debe ser acotada en este intervalo.

Cuando se elimina una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una integral impropia; en otras

palabras, la integral $\int_a^b f(x) dx$; se dice impropia si:

1. $a = -\infty$ ó $b = +\infty$; ó ambos.
2. $f(x)$ no es acotada en uno o más puntos de $[a,b]$.

Cuando en la integral $\int_a^b f(x) dx$; f continua; $a=-\infty$, ó $b=+\infty$

ó ambos; a este tipo de integrales se llamarán integrales impropias de primera especie.

Si en la integral $\int_a^b f(x) dx$, $f(x)$ no es acotada en uno o

más puntos de $[a,b]$, se dice que la integral $\int_a^b f(x) dx$, es

una integral impropia de segunda especie. Y si la integral $\int_a^b f(x) dx$

presenta las dos condiciones anteriores, se llamará integral impropia de tercera especie.

Ejemplos.

$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$; $\int_{-\infty}^0 \operatorname{Sen} x dx$; $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$; son

integrales impropias de primera especie.

Las integrales $\int_{-1}^{10} \frac{dx}{x}$; $\int_{-5}^{10} \frac{dx}{(x-1)(x-5)}$; $\int_5^{16} \frac{dx}{x-7}$ son

integrales impropias de segunda especie.

Y las integrales $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x}$; $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$; $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; Son

integrales impropias de tercera especie.

Se hará un estudio detallado de cada una de ellas.

1.1 INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE.

Sea $f(x)$ acotada e integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$. Se define:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

La integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ se dice convergente si $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

existe; en caso contrario la integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ se dice

divergente.

Cuando $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = A \in \mathbb{R}$; se dice que el valor de la

integral $\int_a^{\infty} f(x) dx = A$.

En forma análoga se define la integral

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ es convergente y hallar su valor.

Solución.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Luego la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ converge y su valor es 1.

Ejemplo 2.

Mostrar que la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ es convergente y hallar su

valor.

Solución.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(e^x+1-e^x) dx}{e^x+1} =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [x - \ln(e^x+1)] \Big|_0^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} [b - \ln(e^{b+1}) + \ln 2] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(b - \ln \left(e^b \left(1 + \frac{1}{e^b} \right) \right) + \ln 2 \right) = \ln 2$$

Y así $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x+1}}$ es convergente

y $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x+1}} = \ln 2.$

Ejemplo 3.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ es convergente y hallar su valor.

Solución.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} (x+1-x) \frac{dx}{x(x+1)} =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x - \ln(x+1) \Big|_1^{\infty} =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln(b+1) + \ln 2) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{b}{b+1} \right) + \ln 2 = \ln 2$$

$$\text{y así } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 2;$$

luego es convergente.

Ejemplo 4.

Mostrar que $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ es convergente y hallar su valor.

Solución.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1$$

luego la $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ es convergente y su valor es 1.

Ejemplo 5.

Mostrar que $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente para $p > 1$ y divergente para

$p < 1$, si $a > 0$.

Solución.

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{1-p} \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p} - a^{1-p}}{1-p} =$$

$$\begin{cases} \frac{-a^{1-p}}{1-p} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

Y si $p=1$ se tiene que

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = +\infty;$$

de aquí las integrales; $\int_1^{\infty} x dx$; $\int_1^{\infty} x^2 dx$; $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{0.9}}$ son

divergentes y las integrales $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$ son

convergentes.

Definición.

Si $f(x)$ es continua para todo x , la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ se

define por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

siendo a cualquier número real.

Si ambas integrales $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ y $\int_a^{\infty} f(x) dx$ convergen

entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge y si cualquiera

de las integrales $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ y $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

diverge. Si $\int_{-\infty}^a f(x) dx = A$ y $\int_a^{\infty} f(x) dx = B$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = A + B$$

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente y hallar su valor.

Solución.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan} x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} x \Big|_0^b =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} 0 - \operatorname{Arctan}(a) + \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan}(b) =$$

$$-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$$

luego $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente y su valor es π .

Ejemplo 2.

Mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ es divergente.

Solución.

$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{\infty} x dx$; Como la integral $\int_0^{\infty} x dx$ es

divergente ya que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2} = +\infty;$$

se puede concluir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \text{ diverge.}$$

Nota: $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = 0$ es incorrecta, pues la

definición requiere de la evaluación de 2 límites diferentes.

Observación 1.

Las integrales del tipo $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ pueden reducirse a

integrales impropias de la forma $\int_a^{\infty} h(x) dx$, si se hace el

cambio de variable $u=-x$.

En efecto:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f(x) dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-b}^a f(-u) du = \int_{-b}^{\infty} f(-u) du.$$

Ejemplo 1.

Mostrar que la $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente.

Solución.

Sea $u=-x$; $du=-dx$ y así

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^0 -\frac{du}{u^2+1} =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{du}{u^2+1} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1}$$

que es convergente.

Ejemplo 2.

Mostrar que la $\int_{-\infty}^{-1} e^x dx$ es convergente.

Solución.

$$\int_{-\infty}^{-1} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{-a}^{-1} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} - \int_a^1 e^{-u} du =$$

(siendo $u=-x$ y $du=-dx$)

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} - \int_a^1 e^{-u} du = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_1^a e^{-u} du = \int_1^{\infty} e^{-u} du = \int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ que es}$$

convergente;

$$\text{luego } \int_{-\infty}^{-1} e^x dx \text{ es convergente.}$$

Observación 2.

Si $f(x)$ es continua en $[a,b)$, pero no acotada en $[a,b)$;

entonces la integral impropia de segunda especie $\int_a^b f(x) dx$

puede reducirse a una integral impropia de primera especie, mediante el cambio de variable $u = \frac{1}{b-x}$

En efecto:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx =$$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{b-c}} f\left(b - \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} =$$

Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$, pero no acotada en $(a, b]$, la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ se puede reducir a una integral

impropia de primera especie haciendo $u = \frac{1}{(x-a)}$.

En efecto:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_{\frac{1}{c-a}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} =$$

$$\lim_{c \rightarrow a^-} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{c-a}} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} = .$$

Como todo tipo de integral impropia puede, mediante un cambio de variable adecuado, transformarse en una integral impropia de primera especie, se enunciarán y se probarán todos los resultados para este caso.

TEOREMA.

Si $f(x)$ y $g(x)$ están acotadas en $[a, +\infty)$ y $\int_a^{\infty} f(x) dx$ y

$\int_a^{\infty} g(x) dx$ convergen ambas, entonces:

i) $\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x)) dx$ converge y

$$\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \pm \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

ii) $\int_a^{\infty} cf(x) dx$ converge y

$$\int_a^{\infty} cf(x) dx = c \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Demostración.

Como para todo $b \in [a, +\infty)$ $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx =$

$$\int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx; \text{ se tiene que:}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \pm$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \pm \int_a^{\infty} g(x) dx$$

y así $\int_a^{\infty} f(x) \pm g(x) dx$ converge y

$$\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \pm \int_a^{\infty} g(x) dx$$

Además como:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b cf(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} c \int_a^b f(x) dx =$$

$$c \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = c \int_a^{\infty} f(x) dx$$

se tiene que $\int_a^{\infty} cf(x) dx$ converge y

$$\int_a^{\infty} cf(x) dx = c \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Ejemplo 1.

Se sabe que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ y $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ son convergentes, entonces

i) $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$ es convergente y

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{dx}{x^2} \right) + \int_1^{\infty} \left(\frac{dx}{x^3} \right).$$

ii) $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$ es convergente y

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{dx}{x^2} \right) - \int_1^{\infty} \left(\frac{dx}{x^3} \right) dx.$$

iii) $\int_1^{\infty} \left(\frac{5}{x^2} \right) dx$ es convergente y

$$\int_1^{\infty} \frac{5dx}{x^2} = 5 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

NOTA.

La integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ es convergente, sin embargo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \neq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}; \text{ pues la } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ y } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$$

son divergentes; para darse la igualdad deben ser ambas integrales convergentes; como lo dice el teorema.

La integración por partes es a menudo útil en la evaluación de las integrales impropias.

Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen derivadas continuas en $[a, +\infty)$; entonces, para todo $b \in [a, +\infty)$.

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

Si se sabe que dos de los tres límites:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g'(x) dx ; \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f'(x) g(x) dx \quad \text{y}$$

$\lim_{b \rightarrow \infty} [f(b) g(b) - f(a) g(a)]$ existen, entonces el tercero

también existe y

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^{\infty} f'(x) g(x) dx.$$

Ejemplo 1.

Calcular $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

Solución.

Sea $f(x) = x$; $f'(x) = 1$; $g'(x) = e^{-x}$; $g(x) = -e^{-x}$,

$$\text{Luego } \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -x e^{-x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-x} dx =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^b = 1.$$

Ejemplo 2.

Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(x) dx$.

Solución.

Se sabe que $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)}{2} \Big|_0^b$,

$$\text{Luego } \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} (\sin(x) - \cos(x))}{2} \Big|_0^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} (\sin(b) - \cos(b)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

En algunas oportunidades se necesita saber si una integral dada converge o no, sin importarnos el valor a donde converge y es por esto que ahora nos dedicaremos a mirar algunos criterios de convergencia.

1.2 CRITERIOS DE CONVERGENCIA

1.2.1 Criterio de comparación.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, +\infty)$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, +\infty)$ y si:

i) Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge; entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

ii) Si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge; entonces $\int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge.

Demostración.

i) Sea $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ y $G(b) = \int_a^b g(x) dx$;

como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$; F y G son crecientes y para todo $b \in [a, +\infty)$ se tiene

$0 \leq F(b) \leq G(b) \leq \int_a^{\infty} g(x) dx$; así F es una función monótona

acotada entonces $\lim_{b \rightarrow \infty} F$ existe y

$\lim_{b \rightarrow \infty} F = \text{Sup} \{ F(x) \mid x \in [a, +\infty] \}$ y así

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ existe.}$$

ii) Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge;

esto contradice la hipótesis.

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente.

Solución.

Se sabe que $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$ con $x > 1$; y como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es

convergente, se tiene que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente ya que

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Ejemplo 2.

Mostrar que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente.

Solución.

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; la $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente; pues

$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+1}$ es un número y $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; y así $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es

convergente, luego

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \text{ es convergente.}$$

Ejemplo 3.

Mostrar que $\int_3^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^5+1} dx$ es convergente.

Solución.

$$\ln(x) < x \text{ y así } \int_3^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^5+1} dx \leq \int_3^{\infty} \frac{x dx}{x^5+1} dx \leq \int_3^{\infty} \frac{x}{x^5} dx = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^4} \text{ que}$$

es convergente y así

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^5+1} dx \text{ es convergente.}$$

Ejemplo 4.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^{20} + \text{Sen}^2(x) + \ln^2(x) + 2}$ es convergente.

Solución.

$$\frac{x^2}{x^{20} + \text{Sen}^2(x) + \ln^2(x) + 2} \leq \frac{x^2}{x^{20}} \text{ y así } \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^{20} + \text{Sen}^2(x) + \ln^2(x) + 2} \text{ es}$$

convergente, ya que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{18}}$ converge y

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^{20} + \text{Sen}^2(x) + \ln^2(x) + 2} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{18}}$$

Ejemplo 5.

Mostrar que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^x + \ln^2(x+1) + x^4}$ es convergente.

Solución.

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^x + \ln^2(x+1) + x^4} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x}$ que es convergente y así

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^x + \ln^2(x+1) + x^4} \text{ es convergente.}$$

Ejemplo 6.

Mostrar que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente.

Solución.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} dx$$

y así $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente; ya que $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ y $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$

convergen.

Ejemplo 7.

Mostrar que $\int_3^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$ es divergente.

Solución.

$$\ln(x) \leq x; \quad \frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \int_3^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)} \geq \int_3^{\infty} \frac{dx}{x}; \quad \text{Como} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x}$$

es divergente, se concluye que

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)} \text{ es divergente.}$$

Ejemplo 8.

Mostrar que $\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{(x^6+16)}} dx$ es divergente.

Solución.

$$\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{(x^6+16)}} dx \text{ es divergente; pues para } x \geq 2 \quad \frac{x^2-1}{\sqrt{(x^6+16)}} \geq \frac{1}{2x}$$

y como $\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x}$ diverge entonces

$$\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{(x^6+16)}} dx \text{ diverge.}$$

1.2.2. Criterio de la condición necesaria.

Si $f(x)$ es continua para todo x en $[a, +\infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

existe, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ es una condición necesaria

para la convergencia de $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Demostración.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \neq 0$. Si $L > 0$; entonces existe un número

$N \geq a$ tal que $f(x) > \frac{L}{2}$ para todo $x > N$. Para todo x_1, b con

$b > x_1 > N$.

$$\int_{x_1}^b f(x) dx > \int_{x_1}^b \frac{L}{2} dx = \frac{L}{2} (b - x_1).$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{L(b-a)}{2} = \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} f(x) dx$ diverge.

Ahora $\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

de modo que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x_1}^b f(x) dx = +\infty$ implica que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = +\infty,$$

la prueba para $L < 0$ es análoga.

Por lo tanto si, $L \neq 0$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ diverge.}$$

Ejemplo 1.

$$\int_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx \text{ diverge; ya que } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \neq 0.$$

Ejemplo 2.

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{x+1} dx ; \text{ diverge; ya que } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 \neq 0.$$

Ejemplo 3.

$$\int_0^{\infty} \text{Sen}(x^2) dx \text{ converge y } \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Sen}(x^2) \text{ no existe}$$

(Ejercicio).

Ejemplo 4.

$$\int_0^{\infty} \text{Sen}(x) dx \text{ diverge y } \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Sen}(x) \text{ no existe.}$$

Ejemplo 5.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ diverge y } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ejemplo 6.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ converge y } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Nota.

Observe que la convergencia de $\int_a^{\infty} f(x) dx$, no siempre

implica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Puede suceder que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ no

existe y $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge o no; pero si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

existe y $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge; entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

1.2.3. Criterio de paso al limite.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, +\infty)$ y $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, +\infty)$ y si:

i) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \geq 0$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge

entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

ii) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ donde $c > 0$ ó $c = +\infty$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$

diverge; entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge.

Este criterio se puede generalizar un poco más:

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ entonces :

i) Ambas integrales $\int_a^{\infty} f(x) dx$; $\int_a^{\infty} g(x) dx$ convergen o

ambas divergen si $c \neq 0$.

ii) Si $c=0$ la convergencia de $\int_a^{\infty} g(x) dx$ implica la

convergencia de $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

iii) Si $c=+\infty$, la divergencia de $\int_a^{\infty} g(x) dx$ implica la

divergencia de $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Demostración

Se dará la prueba solamente para el caso $c>0$, los demás son análogos.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, existe un número $N \geq a$ tal que

$$\frac{1}{2}c < \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}c \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}cg(x) \leq f(x) < \frac{3}{2}cg(x) \quad \text{para todo}$$

$x \geq N$.

Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge entonces $\int_N^{\infty} \frac{3}{2}cg(x) dx$ converge y

así $\int_N^{\infty} f(x) dx$ converge; de donde $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge entonces $\int_a^{\infty} \frac{1}{2}cg(x) dx$ diverge y así $\int_N^{\infty} f(x) dx$

diverge; luego

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ diverge.}$$

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{2^x} dx$ converge.

Solución.

Se busca una función $g(x)$ por ejemplo $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y se

verá que:

$\int_0^{\infty} g(x) dx$ converge ya que:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^x \Big|_0^b = -\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

y así $\int_0^{\infty} g(x) dx$ converge.

Ahora $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{2^x}}{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^x} = 0$ y así $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{2^x} dx$

converge;

pues $\int_0^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$ converge.

Ejemplo 2.

Mostrar que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x+1}}$ es convergente.

Solución.

Tómese $g(x) = \frac{1}{e^x}$; ya se sabe que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x}$ converge y como

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x+1}} < \int_0^{\infty} e^{-x} dx, \text{ se tiene que } \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x+1}} \text{ es convergente;}$$

por el criterio de comparación.

Ahora $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{x+1}}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^{x+1}} = 1$ y así $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{x+1}}$ converge

por el criterio de paso al límite.

Ejemplo 3.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ es divergente.

Solución.

se sabe que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \int_1^{\infty} g(x) dx$ es divergente y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

y así $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ es divergente.

Ejemplo 4.

Mostrar que $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x+1}$ es convergente.

Solución.

Sea $f(x) = \frac{1}{x^4}$ y $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ es convergente y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4+x+1} = 1$

y así $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x+1}$ es convergente.

Ejemplo 5.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4+1}\sqrt{x^{16}+x+1}}$ es convergente.

Solución.

Sea $g(x) = \frac{1}{x^8}$ y como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8}$ converge y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{\sqrt{x^4+1}\sqrt{x^{16}+x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{\sqrt{x^{20}}} = 1; \text{ entonces}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4+1}\sqrt{x^{16}+x+1}} \text{ es convergente.}$$

1.2.4 Criterio de la potencia.

Como un caso particular del criterio de paso al limite, se tiene el criterio de la potencia.

Si $f(x)$ es continua en $[a, +\infty)$, $a > 0$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, +\infty)$; entonces:

i) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r f(x) = c \geq 0$ para algún número real $r > 1$; entonces

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

ii) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r f(x) = c$ donde $c > 0$ ó $c = +\infty$ y $r < 1$; entonces

$$1a \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ diverge.}$$

Demostración.

Se toma $g(x) = \frac{1}{x^r}$ y se aplica el criterio de paso al límite

y el hecho $\int_a^\infty \frac{dx}{x^r}$ es convergente si $r > 1$ y divergente si $r < 1$,

$a > 0$, y así se obtiene nuestro resultado.

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ es divergente.

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = 1 > 0, \quad r=1, \text{ luego diverge.}$$

Ejemplo 2.

Mostrar que $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente.

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1, \quad r=2>1, \text{ luego converge.}$$

Ejemplo 3.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^8+x+1}}$ es convergente.

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 x}{\sqrt{x^8+x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4} = 1 \quad \text{y } r=3, \text{ luego converge.}$$

Ejemplo 4.

En la $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x}$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, $r=1$. En este caso no

se puede aplicar el criterio; pero si se toma $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$,

$r=2$ y así $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x}$ es convergente.

Ejemplo 5.

Mostrar que $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{4x^4+1}$ es convergente.

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{4x^4+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{4x^4} = -\frac{1}{4}; r=2, \text{ luego converge.}$$

Y así se puede generalizar un poco más el criterio anterior.

Se supone $f(x)$ continua en $[a, +\infty)$ y que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A$;

entonces:

i) Si $p > 1$ y A es finito entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

ii) Si $p \leq 1$ y $A \neq 0$ ó $A = +\infty$ entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge.

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

Solución.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ luego como $r=2$, y $c=0$ entonces $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

converge.

Dada una integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$, la integral $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ es una

integral con integrando positivo; por lo tanto el criterio

de comparación puede aplicarse a $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ y se prueba

que si $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge

también.

1.2.5. criterio de convergencia absoluta.

Si $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

Demostración.

Supóngase que $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge, como

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ se tiene que } 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

y como la $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge; $\int_a^{\infty} 2|f(x)| dx$ converge y

así $\int_a^{\infty} (f(x) + |f(x)|) dx$ converge y de aquí

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^{\infty} (f(x) + |f(x)| - |f(x)|) dx \text{ converge.}$$

Se dice que la integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ es absolutamente

convergente si $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge; luego una integral

absolutamente convergente es convergente.

Es posible que $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converja, incluso si $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$

diverge. Si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge, pero $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ diverge,

entonces se dice que $\int_a^{\infty} f(x) dx$ es condicionalmente

convergente.

Ejemplo 1.

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge.

Solución.

$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| < \frac{1}{x^2}$ y como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge; entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Ejemplo 2.

Mostrar que $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4 + x^2 + 1} dx$ es convergente.

Solución.

$\left| \frac{\sin^2 x}{x^4 + x^2 + 1} \right| < \frac{1}{x^4 + 1}$ y $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ es convergente. Luego