OBJETIVO Encontrar una antiderivada particular de una función que satisface ciertas condiciones. Esto implica la evaluación de una constante de integración.

INTEGRACIÓN CON CONDICIONES INICIALES

Si conocemos la razón de cambio, f', de la función f, entonces la función f misma es una antiderivada de f' (ya que la derivada de f es f'). Por supuesto hay muchas antiderivadas de f' y la más general es denotada por la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x,$$

entonces,

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x\ dx = x^2 + C. \qquad \textbf{(1)}$$

Esto es, *cualquier* función de la forma $f(x) = x^2 + C$ tiene su derivada igual a $2x$. Note que debido a la constante de integración, no conocemos $f(x)$ específicamente. Sin embargo, si f debe tener cierto valor para un valor particular de x, podemos determinar el valor de C y conocer así específicamente a $f(x)$. Por ejemplo, si $f(1) = 4$, de la ecuación (1) se tiene

$$f(1) = 1^2 + C,$$
$$4 = 1 + C,$$
$$C = 3.$$

Así,

$$f(x) = x^2 + 3.$$

Esto es, ahora ya conocemos la función particular $f(x)$ para la cual $f'(x) = 2x$ y $f(1) = 4$. La condición $f(1) = 4$, que da un valor de f para un valor específico de x, se llama *condición inicial* (o *valor en la frontera*).

Principios en práctica 1

Problema con condición inicial

La tasa de crecimiento de una especie de bacterias es estimada por medio de $\frac{dN}{dt} = 800 + 200e^t$, en donde N es el número de bacterias (en miles) después de t horas. Si $N(5) = 40{,}000$, determine $N(t)$.

EJEMPLO 1 Problema con condición inicial

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encontrar y. [*Nota: $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$.*] *Encontrar también $y(4)$.*

Solución: aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$:

$$y = \int (8x - 4)\,dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C. \qquad \textbf{(2)}$$

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

Podemos determinar el valor de C por medio de la condición inicial. Como $y = 5$ cuando $x = 2$, de la ecuación (2) tenemos

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C,$$
$$5 = 16 - 8 + C,$$
$$C = -3.$$

Al reemplazar C por -3 en la ecuación (2) se obtiene la función que buscamos:

$$y = 4x^2 - 4x - 3. \qquad (3)$$

Para encontrar $y(4)$, hacemos $x = 4$ en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45.$$

Principios en práctica 2

Problema con condición inicial que incluye a y''

La aceleración de un objeto después de t segundos está dada por $y'' = 84t + 24$, la velocidad a los 8 segundos está dada por $y'(8) = 2891$ pies/seg, y la posición a los 2 segundos está dada por $y(2) = 185$ pies. Determine $y(t)$.

EJEMPLO 2 Problema con condiciones iniciales que implican a y''

Dado que $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$, y $y(1) = -1$, encontrar y.

Solución:

Estrategia: para pasar de y'' a y, son necesarias dos integraciones: la primera nos lleva de y'' a y', y la otra de y' a y. Por tanto, se tendrán dos constantes de integración, que denotaremos como C_1 y C_2.

Como $y'' = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$, y' es una antiderivada de $x^2 - 6$. Por lo que,

$$y' = \int (x^2 - 6)\, dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1. \qquad (4)$$

Ahora, $y'(0) = 2$ significa que $y' = 2$ cuando $x = 0$; por tanto, de la ecuación (4), tenemos

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + C_1.$$

De aquí, $C_1 = 2$, de modo que

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2.$$

Por integración podemos encontrar y:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + C_2,$$

así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2. \qquad (5)$$

Ahora, como $y = -1$ cuando $x = 1$, de la ecuación (5) tenemos

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2.$$

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

Así, $C_2 = -\frac{1}{12}$, por lo que

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}.$$

La integración con condiciones iniciales es útil en muchos casos prácticos como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Ingreso y educación

Para un grupo urbano particular, algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Ellos estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2}, \qquad 4 \le x \le 16,$$

donde $y = 28{,}720$ *cuando* $x = 9$. *Encontrar* y.

Solución: aquí y es una antiderivada de $100x^{3/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} y &= \int 100x^{3/2}\, dx = 100 \int x^{3/2}\, dx \\ &= (100)\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\ y &= 40x^{5/2} + C. \end{aligned} \qquad (6)$$

La condición inicial es que $y = 28{,}720$ cuando $x = 9$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6), podemos determinar el valor de C:

$$\begin{aligned} 28{,}720 &= 40(9)^{5/2} + C \\ &= 40(243) + C \\ 28{,}720 &= 9720 + C. \end{aligned}$$

Por tanto, $C = 19{,}000$ y

$$y = 40x^{5/2} + 19{,}000.$$

EJEMPLO 4 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2,$$

encontrar la función de demanda.

Solución:

> **Estrategia:** al integrar dr/dq y usando una condición inicial, podemos encontrar la función de ingreso r. Pero el ingreso está dado también por la relación general $r = pq$, donde p es el precio por unidad. Así, $p = r/q$. Reemplazando r en esta ecuación por la función de ingreso, obtenemos la función de demanda.

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

Como dr/dq es la derivada del ingreso total r,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)\ dq$$

$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C,$$

o

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C. \qquad (7)$$

El ingreso es cero cuando q es cero.

Suponemos que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0;** esto es, $r = 0$ cuando $q = 0$. Ésta es nuestra condición inicial. Sustituyendo estos valores en la ecuación (7) resulta

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C.$$

Aunque $q = 0$ da $C = 0$, esto en general no es cierto. Ocurre en esta sección porque las funciones de ingreso son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación cuando $q = 0$ puede producir un valor distinto de cero para C.

De aquí, $C = 0$ y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3.$$

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que $p = r/q$ y sustituimos el valor de r.

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}.$$

$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

EJEMPLO 5 Determinación del costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de \$4000. *Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado. Si la función de costo marginal dc/dq es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2,$$

donde c es el costo total (en dólares) de producir q libras de producto por semana, encontrar el costo de producir 10,000 *libras en una semana.*

Solución: como dc/dq es la derivada del costo total c,

$$c = \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2]\ dq$$

$$= 0.000001 \int (0.002q^2 - 25q)\ dq + \int 0.2\ dq.$$

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C.$$

Cuando q es cero, el costo total es igual al costo fijo.

Aunque $q = 0$ da para C un valor igual al costo fijo, esto no es cierto en general. Ocurre en esta sección porque las funciones de costo son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación cuando $q = 0$ puede producir un valor para C que sea diferente del costo fijo.

Los costos fijos son constantes independientemente de la producción. Por tanto, cuando $q = 0$, $c = 4000$, lo cual es nuestra condición inicial. Sustituyendo encontramos que $C = 4000$, por lo que

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000. \qquad (8)$$

De la ecuación (8), cuando $q = 10{,}000$, $c = 5416\frac{2}{3}$. Así, el costo total de producir 10,000 libras de producto en una semana es de \$5416.67.

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

RESOLVER LOS IMPARES

Ejercicio

En los problemas 1 y 2 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas

1. $dy/dx = 3x - 4;\quad y(-1) = \frac{13}{2}.$

2. $dy/dx = x^2 - x;\quad y(3) = \frac{19}{2}.$

En los problemas 3 y 4, si y satisface las condiciones dadas, encuentre y(x) para el valor dado de x.

3. $y' = 4/\sqrt{x},\ y(4) = 10;\quad x = 9.$

4. $y' = -x^2 + 2x,\ y(2) = 1;\quad x = 1.$

En los problemas del 5 al 8 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.

5. $y'' = -x^2 - 2x;\quad y'(1) = 0,\ y(1) = 1.$

6. $y'' = x + 1;\quad y'(0) = 0,\ y(0) = 5.$

7. $y''' = 2x;\quad y''(-1) = 3,\ y'(3) = 10,\ y(0) = 13.$

8. $y''' = e^x + 1;\quad y''(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y(0) = 3.$

En los problemas del 9 al 12 dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

9. $dr/dq = 0.7.$

10. $dr/dq = 15 - \frac{1}{15}q.$

11. $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2.$

12. $dr/dq = 10{,}000 - 2(2q + q^3).$

En los problemas del 13 al 16 dc/dq es una función de costo marginal y los costos fijos están indicados entre llaves. En los problemas 13 y 14, encuentre la función de costo total. En los problemas 15 y 16 encuentre el costo total para el valor indicado de q.

13. $dc/dq = 1.35;\quad \{200\}.$

14. $dc/dq = 2q + 75;\quad \{2000\}.$

15. $dc/dq = 0.09q^2 - 1.2q + 4.5;\quad \{7700\};\quad q = 10.$

16. $dc/dq = 0.000102q^2 - 0.034q + 5;\ \{10{,}000\};\ q = 100.$

17. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos alimenticios en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10% era proteína.[1] La proteína consistió en levadura y harina de maíz.

El grupo encontró que en cierto periodo, la razón de cambio aproximada del aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata, con respecto al porcentaje P de levadura en la mezcla proteínica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2, \qquad 0 \le P \le 100.$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encuentre G.

18. Polilla de invierno En Nueva Escocia[2] se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno. Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huéspedes. Se encontró que la razón (aproximada) con que la densidad y (número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia x (en pies), desde la base de un árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x, \qquad 1 \le x \le 9.$$

Si $y = 57.3$ cuando $x = 1$, encuentre y.

Elaboró:	Revisó:	Aprobó: