https://www.ecuacionesdiferenciales.jcbmat.com/id162.htm

cada uno de los problemas **1** a **12** verifique por sustitución que cada función dada es una solución de la ecuación diferencial considerada:

1. $y' = 3x^2; \quad y = x^3 + 7$ **2.** $y' + 2y = 0; \quad y = 3e^{-2x}$

3. $y'' + 4y = 0; \quad y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \operatorname{sen} 2x$

4. $y'' = 9y; \quad y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-3x}$ **5.** $y' = y + 2e^{-x}; \quad y = e^x - e^{-x}$

6. $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x}$

7. $y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y_1 = e^x \cos x, \quad y_2 = e^x \operatorname{sen} x$

8. $y'' + y = 3\cos 2x; \quad y_1 = \cos x - \cos 2x, \quad y_2 = \operatorname{sen} x - \cos 2x$

9. $y' + 2xy^2 = 0; \quad y = \dfrac{1}{1+x^2}$

10. $x^2y'' + xy' - y = \ln x; \quad y_1 = x - \ln x, \quad y_2 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0; \quad y_1 = \dfrac{1}{x^2}, \quad y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$

12. $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x\cos(\ln x), \quad y_2 = x\operatorname{sen}(\ln x)$

En cada uno de los problemas 13 a 16, sustituya $y = e^{rx}$ en la ecuación diferencial dada para determinar los valores de r para los cuales $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación:

13. $3y' = 2y$ **14.** $4y'' = y$ **15.** $y'' + y' - 2y = 0$

16. $3y'' + 3y' - 4y = 0$

En cada uno de los problemas 17 a 26, compruebe primero que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial dada. Entonces, determinar un valor de la constante C de modo que $y(x)$ satisfaga la condición inicial dada:

17. $y' + y = 0;\ \ y(x) = Ce^{-x},\ \ y(0) = 2$

18. $y' = 2y;\ \ y(x) = Ce^{2x},\ \ y(0) = 3$

19. $y' = y + 1;\ \ y(x) = Ce^{x} - 1,\ \ y(0) = 5$

20. $y' = x - y;\ \ y(x) = Ce^{-x} + x - 1,\ \ y(0) = 10$

21. $y' + 3x^2 y = 0;\ \ y(x) = Ce^{-x^3},\ \ y(0) = 7$

22. $e^{y} y' = 1;\ \ y(x) = \ln(x + C),\ \ y(0) = 0$

23. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x^5;\ \ y(x) = \dfrac{1}{4}x^5 + Cx^{-3},\ \ y(2) = 1$

24. $xy' - 3y = x^3;\ \ y(x) = x^3(C + \ln x),\ \ y(1) = 17$

25. $y' = 3x^2(y^2 + 1);\ \ y(x) = \tan(x^3 + C),\ \ y(0) = 1$

26. $y' + y\tan x = \cos x;\ \ y(x) = (x + C)\cos x,\ \ y(\pi) = 0$

En los problemas 27 a 31, se describe una función $y = g(x)$ mediante alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$ cuya solución (o una de sus soluciones) sea $g(x)$:

27. La pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es la suma de x y y.

28. La recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) interseca el eje x en el punto $(x/2, 0)$.

29. Toda línea recta perpendicular a la gráfica de g pasa por el punto $(0,1)$.

30. La gráfica de g es perpendicular a todas las curvas de la forma $y = k + x^2$ (k es una constante) en su intersección.

31. La línea tangente a la gráfica de g en (x,y) pasa por el punto $(-y,x)$.

En los problemas 32 a 36, escriba una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descrita:

32. La tasa de cambio de una población P con respecto al tiempo t es proporcional a la raíz cuadradade P.

33. La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad de un bote costero de motor es proporcional al cuadrado de v.

34. La aceleración de dv/dt de cierto automóvil deportivo es proporcional a la diferencia entre 250 Km/h y la velocidad del automóvil.

35. En una ciudad que tiene una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han oído un cierto rumor es proporcional al número de las que todavía no lo han oído.

36. En una ciudad que tiene una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han contraído cierta enfermedad es proporcional al producto del número de personas enfermas y el número de las que no lo están.

En los problemas 37 a 42, determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial dada. Esto es, utilice sus conocimientos sobre derivadas para hacer una predicción y después compruebe su hipótesis:

37. $y''=0$ **38.** $y'=y$ **39.** $xy'+y=3x^2$

40. $(y')^2+y^2=1$ **41.** $y'+y=e^x$ **42.** $y''+y=0$

43. $y(x)=1/(C-x)$ define una familia a un parámetro de soluciones de la ecuación diferencial $y'=y^2$.

(a) Determinar un valor de C, de modo que $y(10)=10$.

(b) ¿Existe algún valor de C de modo que $y(0)=0$?

¿Le sería posible encontrar por inspección una solución para $y'=y^2$ tal que $y(0)=0$?

Arriba

Soluciones

1. $y' = 3x^2; \quad y = x^3 + 7$

Solución - Juan Beltrán

$$y' = 3x^2 \Leftrightarrow y' - 3x^2 = 0 \qquad (1)$$

$$y = x^3 + 7,$$

$$\Rightarrow \qquad y' = 3x^2 \qquad (2)$$

$$\therefore \qquad 3x^2 - 3x^2 = 0 \qquad \{(2) \text{ en } (1)\}$$

Arriba

2. $y' + 2y = 0; \quad y = 3e^{-2x}$

Solución - Juan Beltrán

$$y' + 2y = 0 \qquad (1)$$

$$y = 3e^{-2x} \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \qquad y' = -6e^{-2x} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$-6e^{-2x} + 2\left(3e^{-2x}\right) = 0 \Leftrightarrow -6e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0.$$

Arriba

3. $y'' + 4y = 0; \quad y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \operatorname{sen} 2x$

Solución - Juan Beltrán

$$y'' + 4y = 0 \qquad (1)$$

a) $y = \cos 2x \qquad (2),$

$$\Rightarrow \qquad y' = -2\operatorname{sen} 2x,$$

$$\Rightarrow \qquad y'' = -4\cos 2x \qquad (3);$$

$$\therefore \qquad -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0 \qquad \{(2) \text{ y } (3) \text{ en } (1)\}$$

b) $y = \operatorname{sen} 2x \qquad (4),$

$$\Rightarrow \qquad y' = 2\cos 2x,$$

$$\Rightarrow \qquad y'' = -4\operatorname{sen} 2x \qquad (5);$$

$$\therefore \qquad -4\operatorname{sen} 2x + 4\operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \{(4) \text{ y } (5) \text{ en } (1)\}.$$

[Arriba]

4. $y'' = 9y;\ \ y_1 = e^{3x},\ \ y_2 = e^{-3x}$

Solución - Juan Beltrán

$$y'' = 9y \Leftrightarrow y'' - 9y = 0 \quad (1)$$

a) $y = e^{3x} \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = 3e^{3x},$

$\Rightarrow \quad y'' = 9e^{3x} \quad (3);$

$\therefore \quad 9e^{3x} - 9e^{3x} = 0 \qquad \{(2)\text{ y }(3)\text{ en }(1)\}$

b) $y = e^{-3x} \quad (4),$

$\Rightarrow \quad y' = -3e^{-3x},$

$\Rightarrow \quad y' = 9e^{-3x} \quad (5);$

$\therefore \quad 9e^{3x} - 9e^{3x} = 0 \qquad \{(4)\text{ y }(5)\text{ en }(1)\}.$

5. $y' = y + 2e^{-x};\ \ y = e^{x} - e^{-x}$

Solución - Juan Beltrán

$$y' = y + 2e^{-x} \Leftrightarrow y' - y - 2e^{-x} = 0 \quad (1)$$

$$y = e^{x} - e^{-x} \quad (2),$$

$\Rightarrow \quad y' = e^{x} + e^{-x} \quad (3)$

$\therefore \quad e^{x} + e^{-x} - (e^{x} - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} - e^{x} + e^{-x} = 0 \qquad \{(2)\text{ y }(3)\text{ en }(1)\}.$

[Arriba]

6. $y'' + 4y' + 4y = 0;\ \ y_1 = e^{-2x},\ \ y_2 = xe^{-2x}$

Solución - Juan Beltrán

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \quad (1)$$

a) $y = e^{-2x} \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = -2e^{-2x} \quad (3),$

$\Rightarrow \quad y'' = 4e^{-2x} \quad (4);$

$\therefore \quad 4e^{-2x} + 4(-2e^{-2x}) + 4e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 8e^{-2x} - 8e^{-2x} = 0 \qquad \{(2),\ (3)\text{ y }(4)\text{ en }(1)\}$

b) $y = xe^{-2x} \quad (5),$

$\Rightarrow \quad y' = e^{-2x} - 2xe^{-2x} \quad (6),$

$\Rightarrow \quad y'' = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x} = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x} \quad (7);$

$\therefore \quad -4e^{-2x} + 4xe^{-2x} + 4(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 4xe^{-2x} = 0 \Leftrightarrow -4e^{-2x} + 8xe^{-2x} + 4e^{-2x} - 8xe^{-2x} = 0 \qquad \{(4)\text{ y }(5)\text{ en }(1)\}.$

[Arriba]

7. $y'' - 2y' + 2y = 0;\ \ y_1 = e^x \cos x,\ \ y_2 = e^x \operatorname{sen} x$

Solución - Juan Beltrán

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad (1)$$

a) $y = e^x \cos x \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x \quad (3),$

$\Rightarrow \quad y'' = e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x = -2e^x \operatorname{sen} x \quad (4);$

$\therefore \quad -2e^x \operatorname{sen} x - 2(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x) + 2e^x \cos x = 0 \qquad \{(2),\ (3)\ \text{y}\ (4)\ \text{en}\ (1)\},$

$\Rightarrow \quad -2e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + 2e^x \operatorname{sen} x + 2e^x \cos x = 0$

b) $y = e^x \operatorname{sen} x \quad (5),$

$\Rightarrow \quad y' = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x \quad (6),$

$\Rightarrow \quad y'' = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x e^x + e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x = 2e^x \cos x \quad (7);$

$\therefore \quad 2e^x \cos x - 2(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) + 2e^x \operatorname{sen} x = 0 \qquad \{(5),\ (6)\ \text{y}\ (7)\ \text{en}\ (1)\},$

$\Rightarrow \quad 2e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + 2e^x \operatorname{sen} x = 0.$

Arriba

8. $y'' + y = 3\cos 2x;\ \ y_1 = \cos x - \cos 2x,\ \ y_2 = \operatorname{sen} x - \cos 2x$

Solución - Juan Beltrán

$$y'' + y = 3\cos 2x \Leftrightarrow y'' + y - 3\cos 2x = 0 \quad (1)$$

a) $y = \cos x - \cos 2x \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2x,$

$\Rightarrow \quad y'' = -\cos x + 4\cos 2x \quad (3);$

$\therefore \quad -\cos x + 4\cos 2x + \cos x - \cos 2x - 3\cos 2x = 0 \qquad \{(2)\ \text{y}\ (3)\ \text{en}\ (1)\},$

b) $y = \operatorname{sen} x - \cos 2x \quad (4),$

$\Rightarrow \quad y' = \cos x + 2\operatorname{sen} 2x,$

$\Rightarrow \quad y'' = -\operatorname{sen} x + 4\cos x 2x \quad (5);$

$\therefore \quad -\operatorname{sen} x + 4\cos x 2x + \operatorname{sen} x - \cos 2x - 3\cos 2x = 0 \qquad \{(4)\ \text{y}\ (5)\ \text{en}\ (1)\}.$

Arriba

9. $y' + 2xy^2 = 0; \quad y = \dfrac{1}{1+x^2}$

Solución - Juan Beltrán

$$y' + 2xy^2 = 0 \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \qquad y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad (3);$$

$$\therefore \qquad -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \qquad \{(2) \text{ y } (3) \text{ en } (1)\}.$$

Arriba

10. $x^2y'' + xy' - y = \ln x; \quad y_1 = x - \ln x, \quad y_2 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

Solución - Juan Beltrán

$$x^2y'' + xy' - y = \ln x \Leftrightarrow x^2y'' + xy' - y - \ln x = 0 \qquad (1)$$

a) $y = \cos x - \cos 2x \qquad (2),$

$\Rightarrow \qquad y' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2x,$

$\Rightarrow \qquad y'' = -\cos x + 4\cos 2x \qquad (3);$

$\therefore \qquad -\cos x + 4\cos 2x + \cos x - \cos 2x - 3\cos 2x = 0 \qquad \{(2) \text{ y } (3) \text{ en } (1)\},$

b) $y = \operatorname{sen} x - \cos 2x \qquad (4),$

$\Rightarrow \qquad y' = \cos x + 2\operatorname{sen} 2x,$

$\Rightarrow \qquad y'' = -\operatorname{sen} x + 4\cos x 2x \qquad (5);$

$\therefore \qquad -\operatorname{sen} x + 4\cos x 2x + \operatorname{sen} x - \cos 2x - 3\cos 2x = 0 \qquad \{(4) \text{ y } (5) \text{ en } (1)\}.$

Arriba

11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0;\ \ y_1 = \frac{1}{x^2},\ \ y_2 = \frac{\ln x}{x^2}$

Solución - Juan Beltrán

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0 \quad (1)$$

a) $y = \frac{1}{x^2} \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = -\frac{2}{x^3} \quad (3),$

$\Rightarrow \quad y'' = \frac{6}{x^4} \quad (4);$

$\therefore \quad x^2 \cdot \frac{6}{x^4} + 5x\left(-\frac{2}{x^3}\right) + 4 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x^2} - \frac{10}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0 \qquad \{(2),\ (3)\ \text{y}\ (4)\ \text{en}\ (1)\}$

b) $y = \frac{\ln x}{x^2} \quad (5),$

$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \quad (6),$

$\Rightarrow \quad y'' = \frac{6\ln x - 5}{x^4} \quad (7);$

$\therefore \quad x^2 \cdot \frac{6\ln x - 5}{x^4} + 5x \cdot \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 4 \cdot \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6\ln x - 5}{x^2} + \frac{5 - 10\ln x}{x^2} + \frac{4\ln x}{x^2} = 0 \qquad \{(5),\ (6)\ \text{y}\ (7)\ \text{en}\ (1)\},$

$\Rightarrow \quad \frac{6\ln x - 5 + 5 - 10\ln x + 4\ln x}{x^2} = 0.$

Arriba

12. $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\ \ y_1 = x\cos(\ln x),\ \ y_2 = x\,\text{sen}(\ln x)$

Solución - Juan Beltrán

$$x^2y'' - xy' + 2y = 0 \quad (1)$$

a) $y = x\cos(\ln x) \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = \cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x) \quad (3),$

$\Rightarrow \quad y'' = \frac{-\cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x)}{x} \quad (4);$

$\therefore \quad x^2 \cdot \frac{-\cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x)}{x} - x(\cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x)) + 2x\cos(\ln x) = 0 \qquad \{(2),\ (3)\ \text{y}\ (4)\ \text{en}\ (1)\},$

$\Rightarrow \quad -x\cos(\ln x) - x\,\text{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0$

b) $y = x\,\text{sen}(\ln x) \quad (5),$

$\Rightarrow \quad y' = \text{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) \quad (6),$

$\Rightarrow \quad y'' = \frac{\cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x)}{x} \quad (7);$

$\therefore \quad x^2 \cdot \frac{\cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x)}{x} - x(\text{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)) + 2x\,\text{sen}(\ln x) = 0 \qquad \{(5),\ (6)\ \text{y}\ (7)\ \text{en}\ (1)\},$

$\Rightarrow \quad x\cos(\ln x) - x\,\text{sen}(\ln x) - x\,\text{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) + 2x\,\text{sen}(\ln x) = 0.$

Arriba

En cada uno de los problemas 13 a 16, sustituya $y = e^{rx}$ en la ecuación diferencial dada para determinar los valores de r para los cuales $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación.

13. $3y' = 2y$

Solución - Juan Beltrán

$$3y' = 2y \quad (1)$$

$$y = e^{rx} \quad (2),$$

$\Rightarrow \quad y' = re^{rx} \quad (3)$

$\therefore \quad 3re^{rx} = 2e^{rx} \qquad \{(2) \text{ y } (3) \text{ en } (1)\},$

$\Rightarrow \quad 3r = 2 \Leftrightarrow r = \dfrac{2}{3}.$

Arriba

14. $4y'' = y$

Solución - Juan Beltrán

$$4y'' = y \quad (1)$$

$$y = e^{rx} \quad (2),$$

$\Rightarrow \quad y' = re^{rx} \quad (3),$

$\Rightarrow \quad y'' = r^2e^{rx} \quad (4)$

$\therefore \quad 4r^2e^{rx} = e^{rx} \qquad \{(2) \text{ y } (4) \text{ en } (1)\},$

$\Rightarrow \quad 4r^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow r = \pm\dfrac{1}{2}.$

Arriba

15. $y'' + y' - 2y = 0$

Solución - Juan Beltrán

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad (1)$$

$$y = e^{rx} \quad (2),$$

$\Rightarrow \quad y' = re^{rx} \quad (3),$

$\Rightarrow \quad y'' = r^2e^{rx} \quad (4)$

$\therefore \quad r^2e^{rx} + re^{rx} - 2e^{rx} = 0 \Leftrightarrow r^2 + r - 2 = 0 \qquad \{(2), (3) \text{ y } (4) \text{ en } (1)\},$

$\Rightarrow \quad (r+2)(r-1) = 0 \Leftrightarrow r = -2 \quad \text{ó} \quad r = 1;$

$$r = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Arriba

16. $3y'' + 3y' - 4y = 0$

Solución - Juan Beltrán

$$3y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (1)$$

$$y = e^{rx} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = re^{rx} \quad (3),$$

$$\Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rx} \quad (4)$$

$$\therefore \quad 3r^2 e^{rx} + 3re^{rx} - 4e^{rx} = 0 \Leftrightarrow 3r^2 + 3r - 4 = 0 \qquad \{(2),\ (3) \text{ y } (4) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{-3 \pm \sqrt{9+48}}{6}$$

$$r = \begin{cases} \dfrac{-3 - \sqrt{9+48}}{6} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{9+48}}{6} \end{cases}$$

Arriba

En cada uno de los problemas 17 a 26, compruebe primero que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial dada. Entonces, determinar un valor de la constante C de modo que $y(x)$ satisfaga la condición inicial dada.

17. $y' + y = 0;\quad y(x) = Ce^{-x},\quad y(0) = 2$

Solución - Juan Beltrán

$$y' + y = 0 \quad (1)$$

$$y = Ce^{-x} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = -Ce^{-x} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$-Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0$$

Ahora

$$y(0) = 2 \quad (4)$$

$$2 = Ce^{-0} \qquad \{\text{sustituyendo los valores iniciales, dados en } (4), \text{ en } (2)\};$$

$$\therefore \quad C = 2.$$

Arriba

18. $y' = 2y;\ \ y(x) = Ce^{2x},\ \ y(0) = 3$

Solución - Juan Beltrán

$$y' = 2y \Leftrightarrow y' - 2y = 0 \quad (1)$$

$$y = Ce^{2x} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 2Ce^{-x} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$2Ce^{-x} - 2Ce^{2x} = 0$$

Ahora

$$y(0) = 3 \quad (4)$$

$3 = Ce^{2(0)}$ {sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)};

$\therefore \quad C = 3$

Arriba

19. $y' = y + 1;\ \ y(x) = Ce^{x} - 1,\ \ y(0) = 5$

Solución - Juan Beltrán

$$y' = y + 1 \Leftrightarrow y' - y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$y = Ce^{x} - 1 \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = Ce^{x} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$Ce^{x} - (Ce^{x} - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow Ce^{x} - Ce^{x} + 1 - 1 = 0$$

Ahora

$$y(0) = 5 \quad (4)$$

$5 = Ce^{0} - 1 \Leftrightarrow 5 = C - 1$ {sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)};

$\therefore \quad C = 6.$

Arriba

20. $y' = x - y;\;\; y(x) = Ce^{-x} + x - 1,\;\; y(0) = 10$

Solución - Juan Beltrán

$$y' = x - y \Leftrightarrow y' - x + y = 0 \quad (1)$$

$$y = Ce^{-x} + x - 1 \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = -Ce^{x} + 1 \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$-Ce^{x} + 1 - x + Ce^{-x} + x - 1 = 0$$

Ahora

$$y(0) = 10 \quad (4)$$

$$10 = Ce^{-0} + 0 - 1 \Leftrightarrow 10 = C - 1 \qquad \{\text{sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)}\};$$

$\therefore \quad C = 11.$

Arriba

21. $y' + 3x^2y = 0;\;\; y(x) = Ce^{-x^3},\;\; y(0) = 7$

Solución - Juan Beltrán

$$y' + 3x^2y = 0 \quad (1)$$

$$y = Ce^{-x^3} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = -3x^2Ce^{-x^3} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$-3x^2Ce^{-x^3} + 3x^2Ce^{-x^3} = 0$$

Ahora

$$y(0) = 7 \quad (4)$$

$$7 = Ce^{-0^3} \Leftrightarrow 7 = Ce^{0} \qquad \{\text{sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)}\};$$

$\therefore \quad C = 7.$

Arriba

22. $e^{y}y' = 1;\;\; y(x) = \ln(x + C),\;\; y(0) = 0$

Solución - Juan Beltrán

$$e^{y}y' = 1 \Leftrightarrow e^{y}y' - 1 = 0 \quad (1)$$

$$y = \ln(x + C) \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x + C} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$e^{\ln(x+C)}\frac{1}{x + C} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x + C)\cdot\frac{1}{x + C} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$$

Ahora

$$y(0) = 0 \quad (4)$$

$$0 = \ln(0 + C) \Leftrightarrow 0 = \ln C \Leftrightarrow e^{0} = e^{\ln C} \qquad \{\text{sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)}\};$$

$\therefore \quad C = 1.$

[Arriba](#)

23. $x\frac{dy}{dx}+3y=2x^5;\;\; y(x)=\frac{1}{4}x^5+Cx^{-3},\;\; y(2)=1$

Solución - Juan Beltrán

$$x\frac{dy}{dx}+3y=2x^5 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx}+3y-2x^5=0 \quad (1)$$

$$y=\frac{1}{4}x^5+Cx^{-3} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{5}{4}x^4-3Cx^{-4} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$x\left(\frac{5}{4}x^4-3Cx^{-4}\right)+3\left(\frac{1}{4}x^5+Cx^{-3}\right)-2x^5=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^5\cancel{-3Cx^{-3}}+\frac{3}{4}x^5+\cancel{3Cx^{-3}}-2x^5=0 \Leftrightarrow \frac{8}{4}x^5-2x^5=0$$

Ahora

$$y(2)=1 \quad (4)$$

$$1=\frac{1}{4}\cdot 2^5+C\cdot 2^{-3} \Leftrightarrow 1=8+\frac{C}{8} \Leftrightarrow -7=\frac{C}{8}$$ {sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)};

$\therefore \quad C=-56.$

[Arriba](#)

24. $xy'-3y=x^3;\;\; y(x)=x^3(C+\ln x),\;\; y(1)=17$

Solución - Juan Beltrán

$$xy'-3y=x^3 \Leftrightarrow xy'-3y-x^3=0 \quad (1)$$

$$y=x^3(C+\ln x) \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y'=3x^2(C+\ln x)+x^2 \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$x\left(3x^2(C+\ln x)+x^2\right)-3\left(x^3(C+\ln x)\right)-x^3=0 \Leftrightarrow 3x^3(C+\ln x)+x^3-3x^3(C+\ln x)-x^3=0$$

Ahora

$$y(1)=17 \quad (4)$$

$$17=1^3(C+\ln 1) \Leftrightarrow 17=(C+0)$$ {sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)};

$\therefore \quad C=17.$

[Arriba](#)

25. $y' = 3x^2(y^2+1)$; $y(x) = \tan(x^3 + C)$, $y(0) = 1$

Solución - Juan Beltrán

$$y' = 3x^2(y^2+1) \Leftrightarrow y' - 3x^2(y^2+1) = 0 \quad (1)$$

$$y = \tan(x^3 + C) \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = 3x^2\sec^2(x^3+C) \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$3x^2\sec^2(x^3+C) - 3x^2\left(\tan^2(x^3+C)+1\right) = 0 \Leftrightarrow 3x^2\sec^2(x^3+C) - 3x^2\left(\sec^2(x^3+C)\right) = 0$$

Ahora

$$y(0) = 1 \quad (4)$$

$$1 = \tan(0^3 + C) \Leftrightarrow 1 = \tan C \Leftrightarrow C = \tan^{-1}(1)$$ {sustituyendo los valores iniciales, dados en (4), en (2)};

$$\therefore \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Arriba

26. $y' + y\tan x = \cos x$; $y(x) = (x + C)\cos x$, $y(\pi) = 0$

Solución - Juan Beltrán

$$y' + y\tan x = \cos x \Leftrightarrow y' + y\tan x - \cos x = 0 \quad (1)$$

$$y = (x + C)\cos x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \cos x - (x + C)\operatorname{sen} x \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\cancel{\cos x} - (x+C)\operatorname{sen} x + (x+C)\cos x \tan x - \cancel{\cos x} = 0 \Leftrightarrow -(x+C)\operatorname{sen} x + (x+C)\cancel{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}} = 0$$

Ahora

$$y(\pi) = 0 \quad (4)$$

$$0 = (\pi + C)\cos\pi \Leftrightarrow 0 = (\pi + C)(-1) \Leftrightarrow 0 = \pi + C;$$

$$\therefore \quad C = -\pi.$$

Arriba

En los problemas 27 a 31, se describe una función $y = g(x)$ mediante alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$ cuya solución (o una de sus soluciones) sea $g(x)$.

27. La pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es la suma de x y y.

Solución - Juan Beltrán

$$\frac{dy}{dx} = x + y.$$

Arriba

28. La recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) interseca el eje$x$ en el punto $(x/2, 0)$.

Solución - Juan Beltrán

Sea m: pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y)

La recta pasa por los puntos (x, y) y $(x/2, 0)$,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = m = \frac{y-0}{x-x/2} = \frac{y}{x/2};$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Arriba

29. Toda línea recta perpendicular a la gráfica de g pasa por el punto $(0,1)$.

Solución - Juan Beltrán

Sea m_1 : pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y)

m_2 : pendiente de la recta perpendicular a la gráfica de g en el punto (x, y);

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad (1)$$

La recta perpendicular a la gráfica de g pasa por los puntos (x, y) y $(0, 1)$,

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{y-1}{x} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y-1}{x}};$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}.$$

Arriba

30. La gráfica de g es perpendicular a todas las curvas de la forma $y = k + x^2$ (k es una constante) en su intersección.

Solución - Juan Beltrán

Sea $m_1 = \frac{dy}{dx}$: pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y)

$m_2 = 2x$: pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = k + x^2$ en el punto (x, y)

De tal manera que:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{dy}{dx} \cdot 2x = -1;$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x}.$$

Arriba

31. La línea tangente a la gráfica de g en (x,y) pasa por el punto $(-y,x)$.
Solución - Juan Beltrán

Sea $m=\dfrac{dy}{dx}$: pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x,y)

De tal manera que:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x-(-y)} \qquad \{\text{la recta tangente pasa por el punto } (-y,x)\};$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y}.$$

Arriba

En los problemas 32 a 36, escriba una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descrita.

32. La tasa de cambio de una población P con respecto al tiempo t es proporcional a la raíz cuadradade P.
Solución - Juan Beltrán

Sea $\dfrac{dP}{dt}$: tasa de cambio del tamaño de una población respecto al tiempo t

k: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\therefore \qquad \frac{dP}{dt}=k\sqrt{P}.$$

Arriba

33. La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad de un bote costero de motor es proporcional al cuadrado de v.
Solución - Juan Beltrán

Sea $\dfrac{dv}{dt}$: tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad

k: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\therefore \qquad \frac{dv}{dt}=k\cdot v^2.$$

Arriba

34. La aceleración de dv/dt de cierto automóvil deportivo es proporcional a la diferencia entre $250\ Km/h$ y la velocidad del automóvil.

Solución - Juan Beltrán

Sea $\dfrac{dv}{dt}$: aceleración del automóvil

v: velocidad del automóvil

k: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = k(250 - v).$$

Arriba

35. En una ciudad que tiene una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han oído un cierto rumor es proporcional al número de las que todavía no lo han oído.

Solución - Juan Beltrán

Sea $\dfrac{dN}{dt}$: tasa de cambio, con respecto al tiempo, de las personas que han oído el rumor

$P - N$: número de personas que todavía no se han enterado del rumor

k: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\therefore \quad \frac{dN}{dt} = k(P - N).$$

Arriba

36. En una ciudad que tiene una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han contraído cierta enfermedad es proporcional al producto del número de personas enfermas y el número de las que no lo están.

Solución - Juan Beltrán

Sea $\dfrac{dN}{dt}$: tasa de cambio, con respecto al tiempo, de las personas que han contraído la enfermedad

N: número de personas que han contraído la enfermedad

$P - N$: número de personas que todavía no han contraído la enfermedad

k: constante de proporcionalidad

De tal manera que:

$$\therefore \quad \frac{dN}{dt} = kN(P - N).$$

Arriba

En los problemas 37 a 42, determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial dada. Esto es, utilice sus conocimientos sobre derivadas para hacer una predicción y después compruebe su hipótesis.

37. $y'' = 0$

Solución - Juan Beltrán

$y = ax + b$, a y b constantes.

Comprobación:

$y = ax + b,$

$\Rightarrow \quad y' = a,$

$\Rightarrow \quad y'' = 0.$

Arriba

38. $y' = y$

Solución - Juan Beltrán

$y = ke^x$, k constante.

Comprobación:

$y' = y \Leftrightarrow y' - y = 0$

$y = ke^x,$

$\Rightarrow \quad y' = ke^x;$

$\therefore \quad ke^x - ke^x = 0.$

Arriba

39. $xy' + y = 3x^2$

Solución - Juan Beltrán

$y = x^2.$

Comprobación:

$xy' + y = 3x^2 \Leftrightarrow xy' + y - 3x^2 = 0 \quad (1)$

$y = x^2 \quad (2),$

$\Rightarrow \quad y' = 2x \quad (3);$

$\therefore \quad x(2x) + x^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x^2 - 3x^2 = 0.$

Arriba

40. $(y')^2 + y^2 = 1$

Solución - Juan Beltrán

$y = \operatorname{sen} x.$

Comprobación:

$$(y')^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (y')^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$y = \operatorname{sen} x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \cos x \quad (3);$$

$$\therefore \quad (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0.$$

Arriba

41. $y' + y = e^x$

Solución - Juan Beltrán

$y = \frac{1}{2}e^x.$

Comprobación:

$$y' + y = e^x \Leftrightarrow y' + y - e^x = 0 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}e^x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}e^x \quad (3);$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x - e^x = 0.$$

Arriba

42. $y'' + y = 0$

Solución - Juan Beltrán

$y = \cos x.$

Comprobación:

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

$$y = \cos x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sen} x,$$

$$\Rightarrow \quad y'' = -\cos x \quad (3);$$

$$\therefore \quad \cos x - \operatorname{sen} x = 0.$$

[Arriba](#)

43. $y(x) = 1/(C - x)$ define una familia a un parámetro de soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$.

(a) Determinar un valor de C, de modo que $y(10) = 10$.

(b) ¿Existe algún valor de C de modo que $y(0) = 0$?

¿Le sería posible encontrar por inspección una solución para $y' = y^2$ tal que $y(0) = 0$?

Solución - Juan Beltrán

(a) $10 = 1/(C - 10)$,

$\Rightarrow$ $10C - 100 = 1$;

$\therefore$ $C = 101/10 \Leftrightarrow C = 10.1$

(b) No existe ningún valor de C de tal forma que $y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1/C$.

Para $y = 0$ se cumple: $y' = y^2 \wedge y(0) = 0$.

Problema con condición inicial

Problema de un nadador

En la figura 1.2.5 se muestra un río, que fluye en dirección norte, con un ancho $w = 2a$. Las líneas $x = \pm a$ representan las riberas del río, y el eje y su centro. Suponga que la velocidad v_R con la cual el agua fluye aumenta a medida que se aproxima al centro del río, y más aún, está dada en términos de la distancia x, medida desde el centro, por

$$v_R = v_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \qquad (18)$$

Puede utilizar la ecuación (18) para comprobar que el agua fluye más rápido en el centro, en donde $v_R = v_0$, en tanto que $v_R = 0$ en cada ribera del río.

Suponga que un nadador parte del punto $(-a, 0)$ en la ribera occidental y nada hacia el este (con respecto el agua) con una velocidad constante v_S. Como se indica en la figura 1.2.5, su vector velocidad (con respecto al suelo) tiene una componente horizontal v_S y una componente vertical v_R. Por lo tanto, el ángulo de dirección α del nadador está dado por

$$\tan\alpha = \frac{v_R}{v_S}.$$

Como $\tan\alpha = dy/dx$, al sustituir utilizando (18) tenemos la ecuación diferencial

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \rightarrow V_R \qquad (1$$

para la trayectoria del nadador $y = y(x)$ cuando él atraviesa el río.

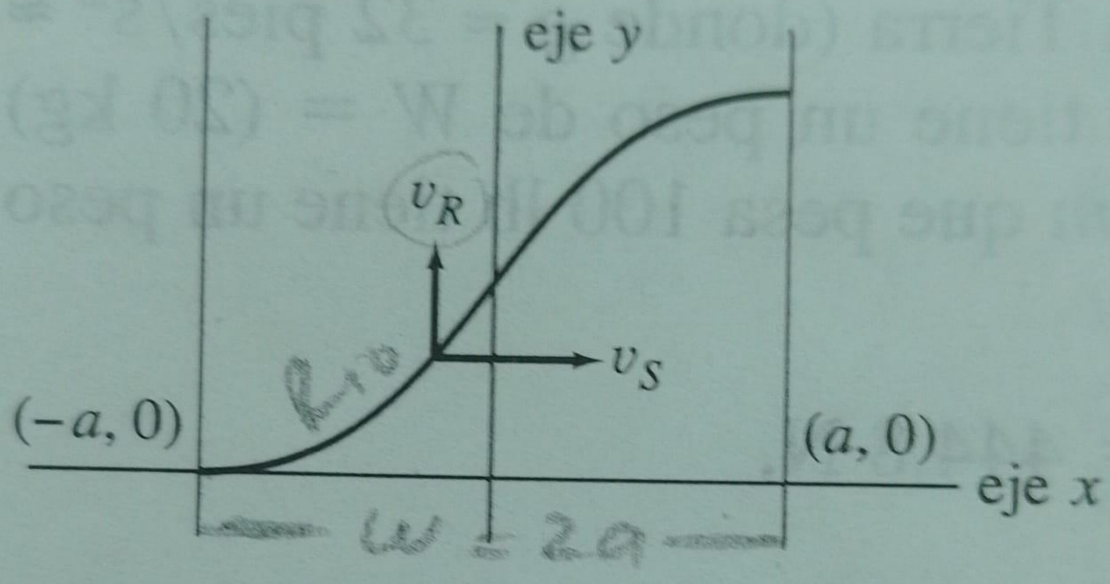

FIGURA 1.2.5 El problema de un nadador (ejemplo 4).