Ejercicios resueltos

IV.1-1 Demostrar que $y(x)=x^2$ es solución de la ecuación diferencial de primer orden $x\dfrac{dy}{dx}=2y$

Solución

$$y(x)=x^2 \Rightarrow y'(x)=2x$$

$$x\frac{dy}{dx}=x\cdot 2x=2x^2=2y$$

IV.1-2 Determinar si la función dada es solución de la ecuación diferencial indicada.

a) $y=senx+x^2$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x^2+2$

b) $y=e^{2x}-3e^{-x}$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

c) $x=2e^{3t}-e^{2t}$ $\qquad \dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=-e^{2t}$

Solución

a) $y=senx+x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\cos x+2x \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=-senx+2$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=-senx+2+senx+x^2=x^2+2$$

b) $y=e^{2x}-3e^{-x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=2e^{2x}+3e^{-x} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=4e^{2x}-3e^{-x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=4e^{2x}-3e^{-x}-2e^{2x}-3e^{-x}-2e^{2x}+6e^{-x}=0$$

c) $x=2e^{3t}-e^{2t}\Rightarrow\dfrac{dx}{dt}=6e^{3t}-2e^{2t}\Rightarrow\dfrac{d^2x}{dt^2}=18e^{3t}-4e^{2t}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=18e^{3t}-4e^{2t}-12e^{3t}+4e^{2t}-6e^{3t}+3e^{2t}=3e^{2t}\neq -e^{2t}$$

IV.1-3 Demostrar que $y(x)=Ce^{3x}+1$ es solución de $\dfrac{dy}{dx}-3y=-3$ para cualquier elección de la constante C. Así, es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial.

Solución

$$y(x)=Ce^{3x}+1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3Ce^{3x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}-3y=3Ce^{3x}-3Ce^{3x}-3=-3$$

Se verifica para cualquier valor de la constante C.

IV.1-4 Determinar para que valores de m la función $y(x)=e^{mx}$ es solución de la ecuación dada.

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+5y=0$

b) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}=0$

Solución

a) $y(x)=e^{mx}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=me^{mx}\Rightarrow\dfrac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+5y=0\Rightarrow m^2e^{mx}+6me^{mx}+5e^{mx}=0$$

$$m^2+6m+5=0\Rightarrow m=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{-6\pm 4}{2}=-1,-5$$

b) $y(x) = e^{mx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = me^{mx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = m^3e^{mx}$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow m^3e^{mx} + 3m^2e^{mx} + 2me^{mx} = 0$$

$$m^3 + 3m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m \cdot \left(m^2 + 3m + 2\right) = 0$$

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = -1, -2$$

$$m = 0, -1, -2$$