

Diagonalización de una matriz 3x3.

Pasos

- 1) Calcular los valores propios: $\det(A - \lambda I) = 0$
- 2) " " " " vectores propios: $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$
- 3) Formar las matrices P y D
- 4) Hallar P^{-1} para calcular $A = P D P^{-1}$

Ej: diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 4 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)[\lambda^2-4\lambda+3] = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = 1$

→ se den
vector
propios

2) Sustituimos λ_i en $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$

$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 5-2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A - 2I$

V_1

→

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rango(A - 2I) = 2
S.C.I

$A - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pero $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2^2}{1^2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^2-3(1^2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{1^2+2^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - 2I$ escalonada.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \rightarrow x = -2z \\ 2y + z = 0 \rightarrow y = -\frac{z}{2} \end{cases}$

Sea $z = t$

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -t/2 \\ z = t \end{cases}$$

Si $t = -2$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (-2t, -t/2, t)$

$= t(-2, -1/2, 1)$ Si $t = 1$

$V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

vector
característico

orden

para $\lambda_2 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I) \vec{V} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}(A - 3I) = 2$$

ya que $F_1 = -2F_3$ ~~suprimo F_1~~ (xg te quedas con las más grandes)
S.C.I.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} F_1 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A-3I$ escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = -y \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ z = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$t \neq 0 \text{ para no tener } \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow t = 1 \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para otro valor de t , cualquier vector propio que obtengamos son múltiplos de $\vec{V}_2$.

Para $\lambda_3 = 1 \Rightarrow A - I$

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } A - I \text{ es } 2 \text{ ya que } F_1 = 4F_2 \rightarrow \text{suprimo } F_1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{S.C.I.}$$

$$\Rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A - I$$

escalonada

$$(A - I) \vec{V} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 2y \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

$$t \neq 0 \text{ para no tener } \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow t = 1 \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) Formas P, D ; P es la matriz de los vectores propios

$$P = \begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

importante el orden
 $\vec{V}_1$ corresponde a $\lambda_1 = 2$
 $\vec{V}_2$ " " " $\lambda_2 = 3$
 $\vec{V}_3$ " " " $\lambda_3 = 1$

36
4) Calcula P^{-1} por hallar $A = P D P^{-1}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalización de A

NO todas las matrices son diagonalizables.
Para que una matriz $n \times n$ sea diagonalizable se necesita obtener un cto de n vectores lineal/ independientes por la matriz A
es d el rango de A es 3. La cual se comprueba $|A| \neq 0$

la matriz P es del mismo tamaño que la matriz A
P es la matriz de los vectores propios

es decir que necesitaríamos n vectores propios; pero no se cumple $\forall$ la matrices

Ej m

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

tiene valores propios repetidos $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
por tanto solo hay un vector propio $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con lo cual NO se

puede formar una matriz P $\Rightarrow$ la matriz A NO es diagonalizable.

usar forma canónica de Jordan.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 8 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 8 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-5-\lambda) + 16 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda = -1 \text{ 2 veces.}$$

$$\begin{array}{r} 3-\lambda \\ -5-\lambda \\ -3\lambda \quad \lambda^2 \\ -15+5\lambda \\ -15+2\lambda+\lambda^2 \end{array}$$

como sol obtenimos $\lambda = -1$

sol tiene un vector propio; el correspondiente a $\lambda = -1 \Rightarrow$ no se puede formar la matriz P.