NOCIONES PRELIMINARES DE LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Proposiciones. Una proposición es un enunciado el cual tiene un solo valor de verdad: Falso o Verdadero.

A una proposición se la designa o se denota con una letra, tales como: p, q, r, s, t, …, P, Q , R, S, T, …

En el lenguaje común o en la cotidianidad, el valor de verdad de una proposición depende de ciertas circunstancias, factores, conveniencias etc., tales como: el tiempo, el lugar, lenguaje convenido, el contexto, etc.

Negación. La negación de una proposición **p**, se indica por **~ p**, en la cual se lee: **no p**. Así, **~ p** es otra proposición llamada la *negación* de **p**. Si **p** es falsa, entonces **~ p** es verdadera; si **p** es verdadera, entonces **~ p** es falsa.

Ejemplo. **p**: 5 es un número natural (verdadera) **~ p**: 5 **no** es número natural (falsa)

q: – 8 no es número entero (falsa) **~ q**: – 8 es número entero (verdadera)

Conjunción. Si **p**, **q** son proposiciones, entonces **p ∧ q** es otra proposición llamada *conjunción* de **p** con **q**. En la expresión **p ∧ q** se lee: **p** y **q**. Una conjunción es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones que la constituyen son verdaderas; en cualquier otro caso, la conjunción es falsa.

Ejemplo. **p**: 0.5 es número racional (verdadera) **q**: – 7.4 es número irracional (falsa)

p ∧ q: 0.5 es número racional **y** – 8.4 es número irracional (falsa)

Disyunción. Si **p**, **q** son proposiciones, entonces **p ∨ q** es otra proposición llamada la *disyunción* de **p** con **q**. En la expresión **p ∨ q** se lee: **p** o **q**. Una disyunción es verdadera, cuando *al menos* una de las dos proposiciones que la constituyen es verdadera. Según esto, una disyunción es falsa, *únicamente* cuando las dos proposiciones que la constituyen son falsas.

Ejemplo. **p**: 0.8 es número racional (verdadera) **q**: – 5.5 es número irracional (falsa)

p ∨ q: 0.8 es número racional **o** – 5.5 es número irracional (verdadera)

Disyunción Excluyente o Exclusiva. Si **p**, **q** son proposiciones, entonces **p ⊻ q** es otra proposición llamada la *disyunción excluyente* de **p** con **q**. En la expresión **p ⊻ q** se lee: **p** ó **q**. Este caso se presenta cuando en una disyunción sólo es posible que se cumpla, o se realice o sea verdadera únicamente una de las dos proposiciones que la constituyen, es decir, la una excluye a la otra; en consecuencia, una disyunción excluyente es verdadera cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen diferente valor de verdad.

Ejemplo. **p**: x es menor que cero **q**: x es mayor que cero

p ⊻ q : x es menor que cero **ó** x es mayor que cero

Tablas de Valores de Verdad.

p	**~ p**
V	F
F	V

p	q	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	f	F

p	q	**p ∨ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	**p ⊻ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Los símbolos **~ ,** ∧**,** ∨**,** ⊻ son operadores lógicos; **~** es operador unario, porque se aplica o "actúa" sobre una sola proposición; ∧ **,** ∨ **,** ⊻ son operadores binarios, porque "unen" dos proposiciones. Los símbolos **~ ,** ∧**,** ∨ son operadores o conectivos lógicos fundamentales.

Proposición Compuesta. Una proposición es compuesta cuando al menos tiene un operador (conectivo) binario.

Proposición Simple. Una proposición es simple cuando no tiene operadores binarios.

La Implicación. Para dos proposiciones, **p** y **q**, la expresión $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ es otra proposición, llamada: implicación, también enunciado condicional, enunciado hipotético o enunciado implicativo. En ella se lee: **p** implica **q**; también si **p** entonces **q** o **p** solamente si **q**. La proposición **p** es el ***antecedente*** y **q** es el ***consecuente***. Esta es la proposición de mayor uso o aplicación en muchos procesos deductivos matemáticos e inclusive en el lenguaje común. En procesos de demostración matemática de una proposición $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, se asume que **p** es verdadera, "***verdad hipotética***", o es la condición que se "impone" y si se concluye que **q** es verdadera, entonces la implicación es verdadera.

Nota. Todo número real es racional ó bien es irracional. Si es racional, no es irracional, o si es irracional, no es racional.

Según lo anterior, todo número racional o irracional es número real.

Ejemplo. **p**: x es un número racional **q**: x es un número real

Nota. En este ejemplo, **p**, **q** son proposiciones *abiertas*, porque su valor de verdad depende del valor que tome o se le asigne a x.

Pero la proposición $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$: ***Si*** *x es un número racional*, ***entonces*** *x es un número real*; ya no es abierta, porque es verdadera. Como se verá más adelante, en el caso de que **p** sea verdadera (verdad hipotética), entonces en verdad **x** es número real, es decir **q** también es verdadera, o se *cumple* **q**.

Doble implicación. A la conjunción $(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p})$ se la denota, se la indica, se la expresa o se la "abrevia" así:

$\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$**.** Se lee: **p** si y sólo si **q**; **p** solamente si **q**. A esta proposición también se la llama **bicondicional**.

Los valores de verdad de la implicación y de la doble implicación, se establecen en las tablas siguientes:

p	q	$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

P	Q	$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ $(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p})$
v	V	v	v	v
v	F	f	v	f
f	V	v	f	f
f	f	v	v	v

Como se observa, si el antecedente de una implicación es falsa, entonces la implicación es verdadera, sin importar el valor de verdad del consecuente. Una bicondicional es verdadera, cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo. **p**: x es un número racional **q**: x es un número real **r**: x es número irracional

La proposición $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$: ***Si*** *x es un número racional*, ***entonces*** *x es un número real* (verdadera)

La proposición $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{q}$: ***Si*** *x es un número irracional*, ***entonces*** *x es un número real* (verdadera)

La proposición $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}$: ***Si*** *x es un número real*, ***entonces*** *x es un número racional* (falsa)

La proposición $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r}$: ***Si*** *x es un número real*, ***entonces*** *x es un número irracional* (falsa)

La proposición $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$: *x es un número racional*, ***si y sólo si*** *x es un número real* (falsa)

a proposición $\mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{p} \veebar \mathbf{r}$: *x es un número real*, ***si y sólo si*** *x es un número real* ***ó*** *x es irracional* (verdadera)

Todo número real, es racional **ó** es irracional.

CONJUNTOS

Concepto. Un conjunto es una "agrupación", "colección", "reunión", "grupo" de objetos, llamados en general ***elementos*** del conjunto. Por su parte, letras mayúsculas, tales como A, B, C, D, X, Y, Z, etc. se las utiliza para denotar o representar conjuntos.

Letras minúsculas como: x, y, z, u, v, etc. se utilizan para representar a los elementos de un conjunto; por esto se las denomina *variables*. Para indicar que **x** representa los elementos de un conjunto **A**, se expresa así: $\mathbf{x} \in A$, y se lee: **x** pertenece a **A**, o también, **x** es un elemento de **A**. En la expresión: $\mathbf{x \notin A}$ se lee: **x** no es elemento de **A** o **x** no pertenece al conjunto **A**; por tanto, $\mathbf{x \notin A}$ es la negación de la proposición $\mathbf{x \in A}$.

Expresiones de un Conjunto. Un conjunto está expresado en forma ***extensiva*** cuando entre llaves están todos sus elementos o parte de ellos pero que identifican, definen o representan a todo el conjunto.

Un conjunto está expresado en forma ***comprensiva*** cuando, entre llaves, sus elementos están representados mediante una o más letras variables, la cual o las cuales, cumplen con una determinada condición o proposición.

Ejemplos. Los siguientes conjuntos están expresados en forma extensiva:

$A = \{2, 8, 20, 30, 45, 3\}$

Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, entonces $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

$2 \in A \qquad 45 \in A \qquad 3 \in A \qquad 5 \notin A \qquad 1 \in \mathbb{N} \qquad 8 \in \mathbb{N} \qquad 200 \in \mathbb{N} \qquad -2 \notin \mathbb{N}$

Los siguientes conjuntos están expresados en forma comprensiva:

$M = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\} \qquad N = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\} \qquad C = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 10\}$

El conjunto **C** en forma extensiva queda así: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Subconjuntos. Para dos conjuntos A, B, la expresión $A \subset B$ se lee: A es ***subconjunto*** de B, **A** está **contenido** en **B** o **A** está **incluido** en **B**. El símbolo $\subset$ representa la inclusión.

Definición. $A \subset B$ si y sólo si, para todo $x \in A$, $x \in B$

$A \subset B \Leftrightarrow$ para todo $x \in A$, $x \in B$

Ejemplo. $\{2, 4, 5, 6, 10, 12\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 16\}$

Sea $A = \{a, b, c, d\}$.

Son subconjuntos de A los siguientes conjuntos:

$B = \{a\}$; $C = \{a, b\}$; $D = \{a, b, d\}$; $E = \{b, c, d\}$

Propiedades. $A \subset A$: todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

Conjunto Vacío. Es el conjunto que **no** tiene elementos; se lo representa con el símbolo ϕ. El vacío es subconjunto de cualquier conjunto. Si **A** es cualquier conjunto, entonces $\boldsymbol{\phi \subset A}$.

Conjunto Unitario. Es todo conjunto constituido por un solo elemento.

Conjunto Universal. Es cualquier conjunto que se toma como **referencia** en alguna teoría, proceso o estudio.

Igualdad de Conjuntos: $A = B \Leftrightarrow$ para todo $x \in A$, $x \in B$ $\wedge$ para todo $x \in B$, $x \in A$. Por tanto, $A = B$ cuando todos los elementos del un conjunto están en el otro conjunto. En símbolos: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

Nota. Un conjunto que se exprese en forma extensiva, no importa el *orden* en que se escriban sus elementos; además, basta con escribir una sola vez cada elemento, es decir, no es necesario repetirlo. Según esto:

$\{2, 7, 9\} = \{2, 9, 7\} = \{9, 7, 2\}$; $\{1, 4, 5, 1, 5, 2\} = \{1, 2, 4, 5\} = \{5, 4, 2, 1\}$; $\{3, 3\}= \{3\}$ este es conjunto unitario.

Los conjuntos $\{5, 5, 5\}$ y $\{2, 2\}$ son unitarios. El conjunto $\{4, 8, 8, 4\}$ tiene dos elementos.

Propiedades.

Reflexiva: $A = A$

Transitiva: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Operaciones entre Conjuntos.

Sea A, B, C conjuntos arbitrarios.

Unión: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Intersección: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

Diferencia. $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Diferencia Simétrica: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Según lo anterior:

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$x \in (A \Delta B) \Leftrightarrow x \in A \veebar x \in B$

Propiedades

1. $A \cup A = A$ 2. $A \cap A = A$ 3. $A \cup B = B \cup A$ 4. $A \cap B = B \cap A$ 5. $A \cup \phi = A$

6. $A \cap \phi = \phi$ 7. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Según las propiedades 1 y 2, se dice que la unión y la intersección son **idempotentes**; según 3 y 4, son **conmutativas**; según 5, la unión es **modulativa**, donde ϕ es el módulo o elemento neutro. De las propiedades 7 y 8 la unión e intersección son asociativas; por 9 y 10 se afirma que la intersección se distribuye respecto a la unión y que la unión se distribuye respecto a la intersección.

Nota1. Teniendo en cuenta las definiciones dadas, se presenta las siguientes afirmaciones:

La unión de dos conjuntos A con B, está constituido por todos los elementos de A y todos los de B. Si hay elementos comunes, se los escribe una sola vez.

La intersección de A con B, está constituido por todos los elementos que están tanto en A como en B; es decir, por los elementos comunes.

A – B es constituido por todos los elementos que están en A pero que no estén en B.

De igual manera, **B – A** es constituido por todos los elementos que están en B pero que no estén en A.

$A \Delta B$ es constituido por todos los elementos que están en A pero que no estén en B, y por todos los elementos que están B pero que no están en A.

Nota2. Cuando $A \cap B = \phi$, se afirma que A y B son conjuntos disjuntos o disyuntos.

Nota3. Si $A \subset B$, entonces: $A \cup B = B$; $A \cap B = A$; $A - B = \phi$; $A \Delta B = B - A$

Ejemplos. Sean los conjuntos $A = \{5, 7, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 50\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18\}$

Entonces:

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 50\}$

$A \cap B = \{5, 7, 12, 15\}$

$A - B = \{8, 10, 20, 30, 50\}$

$B - A = \{2, 4, 6, 9, 14, 18\}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 6, 8, 9, 14, 18, 20, 30, 50\}$

Observe que también $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Complemento de un Conjunto. Si $A \subset B$, entonces, el complemento de A respecto a B se indica así. C_B^A

$C_B^A = \{x \,/\, x \in B \ \wedge x \notin A\}$. Según esto; $C_B^A = B - A$. (C_B^A está constituido por todos los elementos que le “faltan” a A para “igualar” a B)

Si ***U*** es el conjunto de referencia (universal) en una determinada teoría, por ejemplo, en la teoría de conjuntos, entonces cuando se considera en general conjuntos A, B, C, D etc.; todos son subconjuntos de ***U***.

De esta manera, el conjunto C_B^A se indica así: **A’**. Luego, $C_U^A = A' = \boldsymbol{U} - A$. Además, $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$, o también, $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$. Esto es: si un elemento está en un conjunto, dicho elemento no está en el complemento del conjunto; recíprocamente, si un elemento no está en un conjunto, dicho elemento está en el complemento del conjunto.

Propiedades y Casos Especiales

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\qquad$ $(A')' = A$

$A \cup A' = \boldsymbol{U}$ $\qquad$ $A \cap A' = \phi$ $\qquad$ $\boldsymbol{U}' = \phi$ $\qquad$ $\phi' = \boldsymbol{U}$

Ejemplos.

A = { 5, 9, 10, 12, 40, 50 ,80} $\qquad$ B = {2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 30, 40, 50, 60, 70, 80}

Como $A \subset B$, entonces C_B^A = {2, 3, 6, 8, 11, 15, 30, 60, 70} = B – A

Tomando como conjunto de referencia el conjunto ***U*** = {1, 2, 3, 4 ,5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 12, 14 ,15}

Si A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}, entonces A’ **=** {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14 ,15}

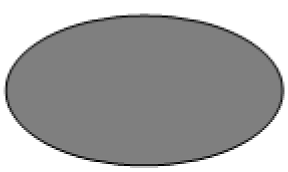
Si B = {1, 2,3, 4, 5, 6, 7}, entonces B’ **=** {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ,15}

Si C = {1, 4, 7, 10, 12, 15}, entonces C’ **=** {2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14}

Diagramas de Venn.

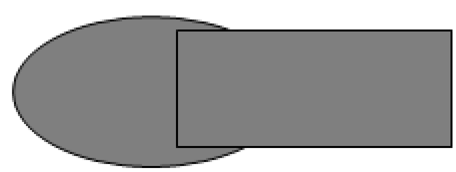
La región sombreada representa al conjunto que se especifica debajo de la región.

A

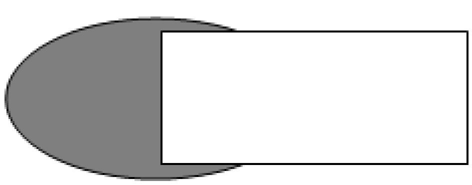


B

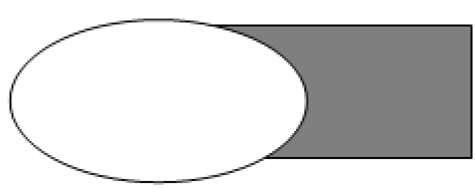
A ∪ B



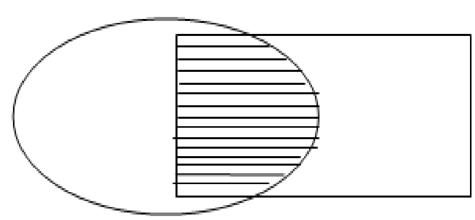
A – B



B – A



A ∩ B (rayado)



A Δ **B** (rayado)